

De Numero Radicum in Æquationibus Solidis ac Biquadraticis, sive tertiæ ac quartæ potestatis, earumq; limitibus, tractatulus Authore *E. Halley*.

CUM in tractatulo, quem nuper publici juris feci in actis hisce Philosophicis, Num. 188; Methodum aperuissem, qua Problemata solida utcumq; affecta minimo negotio, unica data Parabola & Circulo, simplicissime construi possint; sub finem mihi sese obtulit contemplatio jucunda satis, nempe ex his Constructionibus Numerum radicum in quavis Æquatione, earumq; Limites ac signa facile consequi ac determinari: quocirca fidem dedi me brevi de hac materia dissertatiunculam aliquam scripturum, in qua si non Principibus, saltem secundæ classis Geometris, me non ingratum nec inutile præstiturum omnino persuasum habui.

Propius vero inspicienti mihi compertum est, me imprudentem inter ardua Geometrica illapsam, ac jam iis tractandis designatum, quibus olim laboravere Viri illustres Harriottus nostras, ac Cartesius; in quibus pari fato utriq; Paralogsimum, (forsan in eorum scriptis Geometricis unicum) diverso tamen modo, admisere; uti posthac probabitur: sed Quandoq; bonus dormitat. Qua propter agnita rei tum difficultate tum præstantia, totis viribus incumbere statui, ne promissis exequendis impar crederer, ac ne Geometriæ pars tam eximia, tamq; parum culta, diutius tenebris involuta lateret; sed ope nostra lucide his paucis exposita daretur.

Imprimis vero Lectorem monitum velim, quod dum his legendis operam dat, oportet prædictam dissertationem Num. 188. editam, ad manum habere, ac Constructiones ibidem traditas probe callere; quia quæ sequuntur ab illis maxima ex parte pendent, quas tamen hic repetere vix integrum esset.

C c c

E x

Ex Cartesio & ex ibi dictis constat, tam in Cubicis quam in Biquadraticis æquationibus, radices exponi posse demittendo perpendiculara in Axem, datamve diametrum Parabolæ datæ, ab intersectionibus Curvæ illius cum Circulo. Cumq; Circulus Parabolam secans, vel in quatuor vel duobus punctis eam interfecare necesse est, constat in Biquadraticis vel duas vel quatuor radices veras, Affirmativas vel Negativas, semper haberi; uti etiam si forte Circulus illam tangat, quo in casu æqualitas duarum radicum ejusdem signi concluditur. In Cubicis autem, quoniam una ex intersectionibus ad Constructionem requiritur, non nisi una vel tres reliquæ radices designant unam vel tres; uti in Casu contactus, unde constat duas æquales reperiri Radicis, Problemaq; unde resultat æquatio revera planum esse.

Cubicæ itaq; omnes quomodocunq; affectæ una vel triplici radice explicabiles sunt, utiq; semper possibiles, nempe si radices Negativas pro veris admiseris: sic Biquadraticæ, quarum terminus ultimus r signo — affecta est, duabus vel quatuor. Ast si habeatur $+r$ in æquatione, eaq; tanta sit, ut $\sqrt{GD^2 - ar}$, (vide fig. pag. 341.) minor sit quam ut Circulus, eo Radio ac centro G descriptus, Parabolam contingere in aliquo puncto possit, æquatio data omnino impossibilis est, nec ulla Radice Negativa vel Affirmativa explicabilis: Sed de his plura in sequentibus.

Quoniam vero tanta intercedit differentia inter casus Cubicarum & Biquadraticarum, ut simul comprehendendi nequeant; primum Cubicas deinde alteras tractabimus. Cubicæ vero infinitis Circulis in data Parabola construuntur, Biquadraticæ autem unico tantum (saltem his methodis): id adeo quia ponendo $z = e$ sive indeterminata aliqua, æqualem nihilo, æquatio Cubica reducitur ad Biquadraticam easdem radices cum Cubica habentem, atq; insuper aliam ipsi e æqualem; unde fit ut tot Circulis diversis construi possit Cubica, quot imaginari velis quantitates e , id est infinitis. Inter has vero Constructiones illa, quam dedi (pag. 342.) longe facillima est. Huic tamen non multum cedit alia, quæ ad enucleationem Numeri Radicum, earumq; limitum

tum magis accommodata videtur, quæq; ortum trahit ex ablatione secundi termini, ponendo modo vulgari $x=z +$ vel $-$ tertia parte Coefficientis termini secundi. Hæc autem est. Data Parabola ABY (Fig. I.) ejusq; Vertice A , axe AE & Latere recto a , reducatur æquatio ad formam consuetam, viz. $z^2. bz^2. apz. aaq. = 0$. Deinde ad distantiam $\frac{1}{2}b$ ducatur Axi parallela BK , dextrorsum quidem si fuerit $+b$, aliter sinistrorsum, Parabolæ occurrens in B ; ac lineæ suppositæ AB erigatur perpendicularis utrinque interminata DP , axi occurrens in puncto G . De B in Axem demitte perpendicularum BC , & ipsi AC fiat GE semper æqualis, ac versus inferiora ponatur. Ab E fiat $EH = \frac{1}{2}p$, sursum quidem, si in æquatione fuerit $+p$, deorsum vero si $-p$, ac e puncto H (vel ex E si defuerit quantitas p) educatur perpendicularum HQ interminatæ DP occurrens in puncto O . Denique in lineæ HQ interminata, fiat $OR = \frac{1}{2}q$, ab O dextrorsum si fuerit $-q$, sinistrorsum si $+q$, collocanda: ac Circulus centro R , radio RA descriptus, tot punctis secabit Parabolam, quot æquatio proposita veras habet radices; eaq; erunt perpendiculara ZY a punctis intersectionum Y in axi parallelam BK demissa; quarum quæ ad dextram lineæ BK Affirmativæ sunt, ad sinistram Negativæ.

Hujus Constructionis commoditas in eo consistit, quod circulo per Verticem transeunte peragitur, perinde ac si defuisset secundus Terminus; ideoq; ad Radicum Numerum determinandum, sufficit Loci sive Lineæ Curvæ proprietates perspectas habere, quæ spatia discriminat, ubi si ponatur centrum Circuli qui per Parabolæ Verticem transeat, circumferentia ejus vel uno vel tribus aliis punctis eam secabit; hoc est Lineæ curvæ, in quam incidunt centra omnium Circularum per verticem transeuntium ac deinde Parabolam tangentium, naturam definire.

Locus autem ille est Parabolis, quam cum Cl. Wallisio semicubicalem appellare licet, sive in qua Cubi applicatorum ad Axem sunt inter se ut Quadrata portionum Axis. Cujus Latus rectum est $\frac{27}{8}$ Lateris recti datæ Parabolæ, Vertex vero punctum V (Fig. I.) existente AV dimidium lateris recti ejusdem Parabolæ. Hoc est, si ponatur Unitas pro latere recto datæ Para-

bolæ, $\frac{2}{27}$ cubi ordinatim applicatæ æquabuntur quadrato partis diametri, sive cubus ex $\frac{2}{3}$ V H quadrato ex H R, si scil. R sit centrum circuli qui per verticem Parabolæ transeat eamq; deinde contingat; Hæc est Curva illa quam primus mortalium Nelius Nostras rectæ datæ æqualem demonstravit, eaq; occasione apud Principes Geometras dudum celebris; ejusq; proprietates Cl. Wallisius sub finem Libri de Cissoide, & Hugenius prop. 8 & 9 de linearum Curvarum evolutione, aliq; acri ingenio disquisivere, Quorum scripta consulat Lector. Hæc Curva utrinq; ab Axe Parabolæ descripta, viz. V N L, V P X, spatium complectitur, in quo si ponatur centrum Circuli, qui per verticem A transeat, interfecabit ille Parabolam in tribus aliis punctis; Spatia vero ab Axe remotiora centra præbent circulis non nisi uno præter verticem puncto Parabolam secantibus.

His probe intellectis jam ad determinandum Radicum numerum accingimur: Ac primum desiciat secundus terminus; sitque Latus rectum 1, vel A V = $\frac{1}{2}$; In constructione V H est $\frac{1}{2}$ p, H R vero $\frac{1}{2}$ q; cumq; si fuerit + p, ab V versus superiora ponendo sit $\frac{1}{2}$ p, centrum circuli extra spatium L V X semper constituitur; ideoq; una tantum radice explicabilis est, affirmativa si - q, negativa si + q: quæ quidem radices Cardani Regulis investigantur. Si vero fuerit - p, V H = $\frac{1}{2}$ p inferne ponitur, ac fieri potest ut H R cadat inter Axem & Curvam V X vel V L, si scilicet Cubus ex $\frac{2}{3}$ V H, sive ex $\frac{1}{2}$ p, major sit quam quadratum ex $\frac{1}{2}$ q, sive $\frac{1}{27}$ p p p major quam $\frac{1}{4}$ q q, quo in casu tres dantur radices, duæ Negativæ, si fuerit - q, ac una Affirmativa earum summæ æqualis; vel si + q, duæ Affirmativæ unaq; Negativa. Quod si $\frac{1}{27}$ p p p minor sit quam $\frac{1}{4}$ q q, una tantum reperitur Radix, Affirmativa si - q, negativa si + q. Atq; hæc passim docentur ab iis qui hanc Geometriæ partem tractarunt.

Jam adsint omnes termini, ac primum proponatur, Exempli causa, æquatio hæc $z^3 - z^2 b + z p - q = 0$, cui etiam Figuram I. adaptavimus. In hujus constructione B C = $\frac{1}{2}$ b, V G = $\frac{1}{2}$ A C = $\frac{1}{4}$ b b, V E = b b, V H = b b - $\frac{1}{2}$ p, G H = b b - $\frac{1}{2}$ p vel $\frac{1}{2}$ p - b b, hinc H O = $\frac{1}{27}$ b^3 - $\frac{1}{2}$ b p vel $\frac{1}{2}$ b p - $\frac{1}{27}$ b^3, atq; H R sive distan-
tiæ

tia Centri circuli R ab Axe, est semper differentia inter $\frac{1}{2}b p$ & $\frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}q$; quæ si æquantur, centrum cadit in Axe; si $\frac{1}{2}b p$ major sit quam $\frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}q$ ad sinistram Axis, sin minor ad dextram. Si itaq; Cubi ex $\frac{1}{2}VH$, (hoc est ex $\frac{1}{2}b b - \frac{1}{2}p$ quam nominemus d) Latus quadratum sive \sqrt{ddd} , majus sit quam HR, sive differentia inter $\frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}q$ & $\frac{1}{2}b p$; reperitur centrum R intra spatium N P V, Paraboloidibus V P X, V N L ac recta interminata D N P circumscriptum: ac proinde circulus Parabolam secabit in tribus punctis Y, Y, Y, ad dextram lineæ BK sitis, atq; adeo æquatio tres habet radices Affirmativas. Centro vero extra hoc spatium N V P constituto, non nisi una radice Affirmativa explicari potest. Hic obiter notandum rectam D P Paraboloidem V P X tangere in puncto P, existente EP $\frac{1}{2}b^2$; alteram vero V N L secare in puncto N, ita ut demisso in axem Perpendicularo N F, V F sit pars quarta ipsius E V sive $\frac{1}{4}b b$, N F vero $\frac{1}{16}b^2$. V W autem, quæ e puncto V axi perpendiculariter erecta lineæ D P occurrit in W, æqualis est $\frac{1}{2}b b b$ sive $\frac{1}{2}E P$.

Hinc tuto concluditur si in æquatione vel p major sit quam $\frac{1}{2}b b$, vel q major quam $\frac{1}{2}b^2$, non nisi unam eamq; affirmativam radicem reperiri; Fallit itaq; Regula Cartesii (Edit. Amst. 1659 pag. 70) ubi tot veras dari radices quot sunt in æquatione mutationes signorum + & — pronunciat, frustra etiam in Commentariis suis Sphalma hoc excusante Schootenio; Fingi enim possunt infinite plures æquationes præcedentis formulæ tres signorum mutationes habentis, quæ unam tantum quam quæ tres habeant radices. Propositio etiam quinta Sectionis quintæ Artis Analyticæ Harriotti Nostri, uti Prob. 18 Numerosæ Potest. Resol. Vietæ, vix satis firma est, cum ex limitatiombus quas ibi posuerunt, toti parallelogrammo PIV W id conveniat, quod soli spatio N V P jam competere probavimus, hoc est ut centrum præbeat circulo tribus aliis punctis præter verticem Parabolam secante.

Quantitas autem q, sive terminus ult., datis b & p, ea lege ut p minor sit quam $\frac{1}{2}b b$, accurate limitatur ex præcedente æquatione $\sqrt{ddd} = \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}q$ & $\frac{1}{2}b p$; cum scil. Circulus Parabo-

Iam contingat. Itaq; $\frac{1}{2}q$ minor esse debet quam $\frac{1}{2}b p - \frac{1}{27}b^3 + \sqrt{ddd}$; at si p major fuerit quam $\frac{1}{2}b b$, majorem etiam esse oportet $\frac{1}{2}q$ quam $\frac{1}{2}b p - \frac{1}{27}b^3 - \sqrt{d^3}$ ne cadat centrum in spatulo $N V W$: Atq; his conditionibus æquatio semper triplici radice explicabilis erit, aliter non nisi una. Semper vero, sive tres sive una, Affirmativa sunt, ob positionem centri R ad dextram lineæ $D P$.

Atq; hic est casus maxime difficilis, ita ut quicumq; præmissa bene calleat sequentia facili negotio intelliget. Detur jam æquatio $z^3 - b z^2 + p z + q = 0$. Hic ut tres habeantur radices, oportet centrum circuli alicubi intra spatium $P N \Delta$, rectis $P N$, $P \Delta$ & curva Paraboloidis $N \Delta$ definitum, reperiri; quapropter cum $E F$ sit $= \frac{1}{2}b b$, p minor esse debet quam $\frac{1}{2}b b$; jam ad determinationem quantitatis q , existente $d = \frac{1}{2}b b - \frac{1}{3}p$ ut antea, $\sqrt{ddd + \frac{1}{27}b b b - \frac{1}{2}b p}$ semper major esse debet quam $\frac{1}{2}q$, ut constituatur centrum circuli in spatio prædicto $P N \Delta$: quod cum sit æquatio talis duas habet radices Affirmativas ac unam negativam. Si vero p major est quam $\frac{1}{2}b b$, vel $\frac{1}{2}q$ major quam $\sqrt{ddd + \frac{1}{27}b b b - \frac{1}{2}b p}$, non nisi una eaq; negativa radice explicabilis est.

Proponatur jam æquatio $z^3 - b z^2 - p z - q = 0$. Ut hæc æquatio tres habeat Radices, oportet centrum circuli alicubi inveniri in spatio indefinito, inter rectam $D P D$ & curvam Paraboloidis $P X$; hic quantitas p non est obnoxia limitationibus, $\frac{1}{2}q$ vero semper minor esse debet quam $\sqrt{ddd - \frac{1}{27}b b b - \frac{1}{2}b p}$, posito $d = \frac{1}{2}b b + \frac{1}{3}p$: Hoc pacto duæ dantur Radices Negativæ, ac una Affirmativa; aliter vero si $\frac{1}{2}q$ major sit quam $\sqrt{ddd - \frac{1}{27}b b b - \frac{1}{2}b p}$, unica tantum Affirmativa exponi potest. Quarto loco sit æquatio $z^3 - b z^2 - p z + q = 0$, quæ duas Affirmativas habet Radices ac unam Negativam si centrum circuli reperiat in spatio indefinito inter rectas $P \Delta$, $P D$ ac curvam Paraboloidis ΔL ; hoc est, (posito $d = \frac{1}{2}b b + \frac{1}{3}p$), si $\frac{1}{2}q$ minor sit quam $\sqrt{ddd + \frac{1}{27}b b b + \frac{1}{2}b p}$; si vero $\frac{1}{2}q$ major hac quantitate fuerit, una tantum Negativa inest radix.

Quatuor autem æquationes reliquæ, in quibus habetur $+b$, quoad limitationem Numeri Radicum non differunt a prædictis, si signum

num termini ultimi mutetur, servato signo termini tertii; quæ vero Affirmativæ erant radices in illis hic fiunt Negativæ; & vice versa. Sic in æquatione $z^3 - bz^2 + pz - q = 0$. Una vel tres erant Affirmativæ Radices; in hac vero $z^3 + bz^2 + pz + q = 0$ vel una vel tres Negativæ sunt, sub iisdem conditionibus; nulla vero omnino Affirmativa. Sic in $z^3 + bz^2 + pz - q = 0$, duæ sunt Negativæ & una Affirmativa, si p minor sit quam $\frac{2}{3}b$, ac $\frac{2}{3}q$ minor quam $\sqrt{d^3 + \frac{2}{27}b^3} - \frac{2}{3}bp$, quemadmodum in $z^3 - bz^2 + pz + q = 0$ duæ erant Affirmativæ & una Negativa; excedentibus autem leges præscriptas p vel q , una tantum hic est radix Affirmativa, quæ ibi Negativa erat. Pari modo in $z^3 + bz^2 - pz + q = 0$ vel duæ sunt Affirm. ac una Neg. vel una Negativa tantum. Deniq; iisdem de causis in æquatione $z^3 + bz^2 - pz - q$ duæ sunt Negativæ & una Affirm. vel una Affirm. tantum, quibus in æquatione $z^3 - bz^2 - pz + q$ duæ erant Affirm. & una Negativa, vel una Negativa tantum, nempe prout $\frac{2}{3}q$ major vel minor fuerit quam $\sqrt{d^3 + \frac{2}{27}b^3} + \frac{2}{3}bp$.

Si defuerit terminus tertius, sive $p z$, centrum R semper cadit in linea $IPE \Delta$, quocirca si fuerit $z^3 - bz^2. * - q$ vel $z^3 + bz^2. * + q$, una tantum esse potest radix, si $-b$ Affirmativa, si $+b$ Negativa. At si fuerit $z^3 - bz^2. * + q$ vel $z^3 + bz^2. * - q$, duæ possunt esse Affirmativæ ac una Negativa in priore, vel una Affirm. & duæ Neg. in posteriori, cadente centro in linea $P \Delta$ inter P ac Δ , hoc est si $\frac{2}{3}q$ minor sit quam $\frac{2}{3}b^3$; sin major fuerit, una tantum Negativa in priore, vel una Affirm. in posteriore dari potest.

Hactenus numerum radicum in Cubicis æquationibus plenius affecti sumus, restat ut nonnulla adjiciam de quantitate radicum. Hic primum notandum quod omnis æquatio tres habens radices ope Tabulæ Sinuum, Trisectione scilicet anguli, satis expedite resolvi possit; ponendo scil. $\sqrt[3]{\frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}p}$ vel $\sqrt[3]{\frac{1}{4}d}$, si fuerit $+p$ in æquatione, vel $\sqrt[3]{\frac{1}{4}bb + \frac{1}{4}p}$, si $-p$, pro Radio Circuli; Angulum vero trisecandum qui Sinum habeat in Tabula Sinuum $\frac{\frac{1}{3}b^3 + \frac{1}{3}bp + \frac{1}{3}q}{\sqrt{ddd}}$: Invento hoc angulo, Sinus

tertiæ partis ejus, ut & Sinus tertie partis compl. ad Semicirculum, eorumq; summa, ex Tabula Sinuum dabuntur. Hi vero Sinus in Radium $\sqrt{bb + p}$ ducendi sunt, & habebuntur quantitates ($y \&, y \&, y \&$, in Fig.) quarum & b vel summa vel differentia, prout casus postulat, veras radices Aequationis exhibebunt. Hæc omnia ex inventis Cartesii derivantur: Ut vero casus omnes quantum fieri possit breviter complectar, dico quod centro R, in prima aequationum formula, cadente in spatio V G P, sectiones duæ Y, Y, cadunt inter A & B, ac proinde utraq; ex minoribus radicibus minor est quam b , tertia autem & major semper superat $\frac{1}{2}b$, superatur vera a b . Quod si cadit in spatio G N V, duæ majores sunt quam $\frac{1}{2}b$, minores vero quam $\frac{1}{2}b$, tertia vero est $b -$ duabus alteris, ac proinde minor quam $\frac{1}{2}b$: sed adhibita limitatione quantitatis p , arctioribus terminis radicis includuntur. Maxima enim radix minor est quam $\sqrt{bb - \frac{1}{2}p} + \frac{1}{2}b$, major vero quam $\sqrt{bb - p} + \frac{1}{2}b$; at cum $\frac{1}{2}b$ minor est quam p , limes ille fit $\sqrt{bb - \frac{1}{2}p} + \frac{1}{2}b$. Radix media semper minor est quam $\sqrt{bb - p} + \frac{1}{2}b$; major vero quam $\frac{1}{2}b - \sqrt{bb - \frac{1}{2}p}$; hunc vero litem nunquam excedit radix minima, sed cum quantitate q evanescit.

In secunda formula præscriptis legibus duæ sunt affirmativæ ac una negativæ, ac cadente centro in spatio G' E altera ex affirmativis major est, altera minor quam $\frac{1}{2}b$, major vero non excedit b , Negativa autem major non esse potest quam $\sqrt{bb} - \frac{1}{2}b$, est autem differentia ipsius b & summe Affirmativarum. Centro autem in spatio E N G Δ posito, utraq; Affirmativa major est quam $\frac{1}{2}b$, minor vero quam $\sqrt{bb} + \frac{1}{2}b$, Negativa vero semper minor est quam $\frac{1}{2}b$. Limes autem proprios ex data p evadunt, radicis quidem maximæ Affirmativæ $\sqrt{\frac{1}{2}b b - p} + \frac{1}{2}b$, qua semper minor est, ut & major quam $\sqrt{\frac{1}{2}b b - \frac{1}{2}p} + \frac{1}{2}b$; hoc tamen limite minor est altera Affirmativa, quæ cum quantitate q minuitur. Negativa vero semper minor est quam $\sqrt{bb - p} - \frac{1}{2}b$, ac deficiente quantitate q evanescit.

In tertia formula duæ Negat. sunt ac una Affirmativa: in hac, ut &

ut & in quarta, Radices non limitantur a quantitate b. Affirmativa vero semper minor est quam $\sqrt[3]{b^2 b + \frac{4}{3}p + \frac{1}{3}b}$, major tamen quam $\sqrt[3]{p + \frac{4}{3}b^2 b + \frac{1}{3}b}$: maxima vero ex Negativis semper major est quam $\sqrt[3]{b^2 b + \frac{4}{3}p - \frac{1}{3}b}$, minor vero quam $\sqrt[3]{p + \frac{4}{3}b^2 b - \frac{1}{3}b}$. Minor autem ex Negativis semper minuitur cum minuta quantitate q.

In quarta formula, cadente centro intra spatium $L \Delta P D$; si duæ sint Affirmativæ ac una Negativa, maxima ex Affirmativis major esse nequit quam $\sqrt[3]{p + \frac{4}{3}b^2 b + \frac{1}{3}b}$, nec minor quam $\sqrt[3]{\frac{4}{3}b^2 b + \frac{4}{3}p + \frac{1}{3}b}$; minor vero radix ab hoc limite minuitur, minuta quantitate q. Negativa autem minor est quam $\sqrt[3]{\frac{4}{3}b^2 b + \frac{4}{3}p - \frac{1}{3}b}$; major vero quam $\sqrt[3]{p + \frac{4}{3}b^2 b - \frac{1}{3}b}$.

Notandum vero hic radices Negativas ubiq; signo Affirmativo notari, quia hæc sunt radices Affirmativæ quatuor æquationum illarum, in quibus habitur + b, ac q signo contrario notatur; ut supra monui. Horum omnium demonstratio ex eo consequitur, quod ubicunq; centrum circuli R incidit in Lineas Curvas $V P X$ vel $V \Delta L$, circumferentia ejus Parabolam tangit in puncto, cujus distantia ab axe est $\sqrt[3]{\frac{2}{3}V H}$, eamq; secat ex altera Axis parte, ad distantiam $2 \sqrt[3]{\frac{2}{3}V H}$; cum vero centrum cadit in lineam DPD , altera ex radicibus fit = 0, ac proinde Cubica reducitur ad Quadraticam, sive ad $z^2 - bz + p = 0$ cujus radices limites designant ubi evanescit quantitas q: ac quo minor est q, eo propius ad has limites accedunt radices. Quadratica est etiam cum centrum cadit in Axe; hoc est, cum $\frac{2}{3}q = \frac{2}{3}b p - \frac{1}{27}b^3$ in prima formula; vel $\frac{2}{3}q = \frac{2}{27}b^2 b b - \frac{2}{3}b p$ in secunda; in tertia impossibile est; at in quarta cum $\frac{2}{3}q = \frac{2}{27}b^2 b b + \frac{2}{3}b p$; quo in casu minor ex Radicibus Affirmativis est $\frac{2}{3}b$, major $\sqrt[3]{\frac{2}{3}b^2 b + p + \frac{1}{3}b}$; Negativa vero $\sqrt[3]{\frac{2}{3}b^2 b + p - \frac{1}{3}b}$. In prima, Radices sunt $\frac{2}{3}b$ & $\frac{1}{3}b \pm \sqrt[3]{\frac{1}{3}b^2 b - p}$. In secunda vero formula, $\frac{2}{3}b$ & $\sqrt[3]{\frac{2}{3}b^2 b - p + \frac{1}{3}b}$ sunt Affirmativæ: Negativa autem $\sqrt[3]{\frac{2}{3}b^2 b - p - \frac{1}{3}b}$.

Atq; hæc in Cubicis sufficere posse videntur; ob eximium vero Usum Methodi, qua ope Tabulæ Sinuum radices harum æquati-

onum inveniuntur, placuit unum vel alterum exemplum adju-
gere, ut praxis illius compendium inde innotescat. Proponatur
Equatio $z z z - 39 z z + 479 z - 1881 = 0$; quaruntur
radices z . $\sqrt{\frac{1}{2} b b - \frac{1}{3} p} = \sqrt{9 \frac{1}{3}} = \sqrt{d}$, cujus duplum $\sqrt{37}$
radius est Circuli; & $\frac{\frac{1}{2} b b b + \frac{1}{2} q - \frac{1}{6} b p}{\sqrt{d d d}} = \frac{2197 + 940 \frac{1}{2}}{9 \frac{1}{3} \sqrt{9 \frac{1}{3}}}$

$= \frac{3113 \frac{1}{2}}{9 \frac{1}{3} \sqrt{9 \frac{1}{3}}}$ sive $\frac{24}{9 \frac{1}{3} \sqrt{9 \frac{1}{3}}}$ est sinus Tabularis Anguli, hoc, est,

facta divisione ope Logarithmorum, Log. 9.9251560, cui respon-
det, Angulus 57gr. 19m. 11s. $\frac{1}{2}$. Hujus tertia pars 19g. 6m. 24s.
& complementi 40g. 53m. 36s. Sinus dant Log. 9.514983.
& 9.816011, qui ducti in Rad. $\sqrt{37}$; producant Y &, & Y &
Log. 0.301030 = 2 & Log. 0.601059 = 4, tertia vero Y &
equalis est eorum summae sive 6. Ideoq; radices sunt 13—4=9.
13—2=11 & 13+6=19, ex quibus singulis conflatur praedicta
equatio. Ubi Notandum duas minores radices non excedere
 $\frac{1}{2} b$ vel 13, quia centrum R in constructione cadit ad dextram
Axis; id est $\frac{1}{2} b p$ minor est quam $\frac{1}{2} b^3 + \frac{1}{2} q$.

Exemplum alterum sit $x^3 - 15x^2 - 229x - 525 = 0$.
& querantur radices. $\sqrt{\frac{1}{2} b b + \frac{1}{3} p} = \sqrt{101 \frac{1}{3}} = \sqrt{d}$, & Ra-
dius Circuli $\sqrt{405 \frac{1}{2}}$. $\frac{\frac{1}{2} b^3 + \frac{1}{2} b p + \frac{1}{2} q}{\sqrt{d d d}} = \frac{125 + 572 \frac{1}{2} + 262 \frac{1}{2}}{101 \frac{1}{3} \sqrt{101 \frac{1}{3}}}$

$= \frac{960}{101 \frac{1}{3} \sqrt{101 \frac{1}{3}}}$ = Sinui Tabulari Arcus, cujus Log. 9.9736426,

& Arcus ipse 70gr. 14m. 22s. hujus pars tertia est 23gr. 24m.
47s. & complementi 36. 35. 12 $\frac{1}{2}$; quorum Sinus Log.
sunt 9.599183 & 9.775275, quibus addito Log. $\sqrt{405 \frac{1}{2}}$ sunt
Log. 0.903089=8 & Log. 1.079181=12, & eorum summa
=20. Hinc concluditur 20 + $\frac{1}{3} b$ vel 25 equari radici Affir-
mativæ, & 8 & 12 — $\frac{1}{2} b$ sive 3 & 7 Negativis. Quod si æ-
quatio fuisset $x^3 + 15x^2 - 229x + 525 = 0$, 3 & 7 fuissent Affir-
mativæ; 25 vero Negativa. Cæteræ autem Cubicæ unica
tantum Radice explicabiles juxta Regulas Cardani resollen-
dæ sunt, postquam demptus fuerit secundus terminus; nec vi-
deo quo pacto minori calculo hoc negotium peragi possit. At si
desideretur radix hæc in Quantitatibus b, p, q expressa, dico
eam

eam esse in prima formula, $\frac{1}{2}b +$ vel $-$ summa vel differentia Radicum Cubicarum ex $\sqrt{\frac{1}{2}qq - \frac{1}{108}p^2 b^3 + \frac{1}{27}b^3 q - \frac{1}{2}bpq + \frac{1}{27}p^3 \pm \frac{1}{27}b^3 + \frac{1}{2}q - \frac{1}{2}b p}$: viz. $+$, si $\frac{1}{27}b^3 + \frac{1}{2}q$ major sit quam $\frac{1}{2}b p$, aliter $-$; Summa vero quoties $\frac{1}{2}b b$ major est quam p ; sin minor fuerit $\frac{1}{2}b b$, differentia. Inq; cæteris formulis radix semper conflatur ex iisdem elementis, variatis tamen signis $+$ & $-$, ut facile percipiet qui velit experiri.

Ope vero Tabulæ Logarithmicæ Sinuum Versorum Radices hæc satis prompte inveniuntur; nempe si Coefficientes Numeri sint Surdi vel fracti, ac radices Numeris ineffabiles; ut plerumq; sit. Hæc autem est Regula: In prima ac secunda formula, si $\frac{1}{2}b b$ minor sit quam p ; sit $\frac{1}{3}p - \frac{1}{2}b b = d$, & posita differentia inter $\frac{1}{2}b p$ & $\frac{1}{27}b^3 + \frac{1}{2}q$, hoc est HR , in prima, ac inter $\frac{1}{2}b p + \frac{1}{2}q$ & $\frac{1}{27}b^3$, in secunda, pro Radio; inveniatur angulus cujus Tangens est $d \sqrt{d}$. Deinde ut Co-sinus huius anguli, ad ejusdem Sinum versum: ita differentia pro Radio habita, ad quartum; cujus Latus cubicum trisecando Logarithmum habebitur: ac diviso $\frac{1}{3}p - \frac{1}{2}b b$ per hoc Latus Cub. e Quoto subducatur Divisor: Residuum erit quantitas $Y \&$, in Fig. I. Hujus Residui ac $\frac{1}{2}b$ summa, si centrum cadit ad dextram Axis, aliter differentia earundem, Radix erit quaesita. Quod si $\frac{1}{2}b b$ major sit quam p , posito HR pro Radio, sit $d \sqrt{d}$ sive distantia Paraboloidis ab Axe, Sinus Arcus cujusdam; Hujus Sinus versus ducatur in Radium, sive $\frac{1}{2}b p - \frac{1}{27}b^3 \pm \frac{1}{2}q$, ac trisecto producti Logarithmo, habebitur ejus Latus Cubicum, per quod dividatur $\frac{1}{2}b b - \frac{1}{3}p$. dico Quoti ac divisoris summam eadem Lege additam vel ablatam ex $\frac{1}{2}b$, Radicem quaesitam exhibere. Ac par est ratio in tertia ac quarta formulis, nisi quod $\frac{1}{27}b b b + \frac{1}{2}b p \pm \frac{1}{2}q$ pro Radio assumenda est, ac $\frac{1}{2}b b + \frac{1}{3}p$ in $\sqrt{\frac{1}{2}b b + \frac{1}{3}p}$ sive $d \sqrt{d}$ pro Sinu: Sed hæc præcepta exemplis fortasse melius percipientur.

Sit æquatio Cubica $z z z - 17 z z + 54 z - 350$, ac quaeratur Radix z : Hic $\frac{1}{2}b b$ major est quam p , sed q major est quam Cubus ex $\frac{1}{2}b$, ideoq; una tantum Affirmativa Radice applicabilis est. Nam $\frac{1}{3}p - \frac{1}{2}b b$ est d , ac $\frac{1}{27} \sqrt{\frac{1}{27}}$ pro Sinu habenda est, ad Radium $\frac{100}{27} + 175 - 153$, hoc est $\frac{100}{27}$:

Arcus vero competens fit 15gr. 3m. 49s. Hujus Sinus Versi Log. 8.5362376. additus Log. Radii 2.3095913. dat. 0.8457-889. cujus tertia pars 0.2819276. est Log. Radicis Cubicæ 1.91394, quo divisore diviso $\frac{127}{9}$ sive d, fit Quotus 7.37281; Quoti ac divisoris summa, aucta additione $\frac{1}{3}$ b, fit Radix quaesita, nempe 14.9534, &c.

Exactis Cubicis Biquadraticas jam aggrediamur; Hæ semper vel nullam, vel duas, vel quatuor Radices veras habent, quarum determinatio partim a Coefficientibus, partim a signo & magnitudine numeri absoluti dati, pendet; Harum omnium Constructionem generalem (in N^o. 188. Pag. 341) satis concinnam prodidi, quam Lector jam vidisse supponitur; Figuram tamen eo spectantem (Fig. II.) huc transferre visum est. In Constructione æquationis $z^4 - bz^3 + pzz - qz + r = 0$, fit $BD = \frac{1}{4}b$, $AB = \frac{1}{4}bb$, $BK = \frac{1}{4}$, sive dimidio Lateris recti, $KC = 2 AB = \frac{1}{2}bb$. $KE = \frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}p$, $AE = \frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}p$, $FE = \frac{1}{16}b^3 - \frac{1}{4}bp$, ac $EG = \frac{1}{16}b^3 - \frac{1}{4}bp + \frac{1}{4}q$; quo factò Circulus centro G, Radio $\sqrt{GD^2 - r}$, interfecabit Parabolam vel nullo, duobus aut quatuor punctis, quæ perpendicularis in lineam DH, Radices omnes z exhibent. Ut autem quatuor sint, evidens est centrum circuli alicubi constitui debere intra spatium, de cujus puncto quovis tria perpendiculara in Curvam Parabolæ demitti possint; atq; simul radium minorem esse maximo ex illis perpendicularibus, majorem vero medio. Quod si centrum constituatur extra hoc spatium, ut non nisi una perpendicularis in Parabolam demitti possit, qua major sit radius; vel si minor sit media ex tribus perpend. major vero quam minima ex illis, duæ tantum possunt esse radices; nulla vero omnino datur, quoties radius $\sqrt{GD^2 - r}$ minor est minima ex tribus, vel una illa, quoties una tantum est.

Jam quæle spatium hoc sit, quibusq; limitibus discernitur, ac quibus conditionibus radius Circuli minor vel major sit prædictis perpendicularibus, nobis restat inquirendum; ac primum quo pacto perpendicularis in Parabolam demitti possit ostendendum est.

Sit ABC Parabola, AE Axis ejus, AV (Fig. III.) semi-Latus rectum, G punctum de quo demittenda est perpendicularis: Ducatur Axi perpend. GE, ac bisecetur VE in F, & erecta perpend. FH ad idem Axis Latus, fiat $FH = \frac{1}{4}GE$; dico quod Circulus, Centro H, radio HA descriptus, Parabolam interfecabit in punctis tribus vel uno Z; ad qua ducta recta GZ Curva Parabolica perpendiculariter insistunt.

Ut autem tres sint hujusmodi interseccioniones, oportet centrum circuli H ita collocari, ut sit intra spatium Paraboloidibus (in Fig. I.) inclusum; hoc est ut FH minus quam $\sqrt{\frac{8}{27}}VF^3$ sive FH^2 minus quam cubus ex $\frac{2}{3}UF$: atq; adeo $GE = 4FH$ minor erit quam $4\sqrt{\frac{8}{27}}VF^3$ sive $4\sqrt{\frac{2}{27}}VE^3$, hoc est quadratum ex GE minor erit quam $\frac{16}{27}VE^3$. Coincidunt itaq; hi limites cum Paraboloidibus duabus ejusdem generis cum iis quibus in Cubicis usi sumus, sed quarum Latus rectum duplo minor est; viz. $\frac{27}{8}$ Lateris recti Parabolae, hoc est $\frac{27}{8}$ ipsius AV: ideoq; ea ipsa est linea Curva cujus evolutione generatur Parabola, sic demonstrante Hugenio; quamq; semper contingit linea DF, (Fig. II.) qua Parabola perpendiculariter insistit in puncto D. Punctum autem P, sive in quo contingit recta DF Paraboloidem, centrum est Circuli, qui radio DP descriptus cum Parabola in puncto D coincidit, sive ejusdem Curvitatatis est; ut per se satis constat.

Descriptis itaq; hujusmodi Paraboloidibus VXP, VNΔ (Fig. II.) utrinq; ab Axe; perspicuum est quod, nisi centrum Circuli constituitur intra hos limites, non possit ille pluribus quam duobus in punctis Parabolam interfecare: unde determinare licet quibus sub conditionibus Coefficientes terminorum intermediorum coercentur, in aequationibus Biquadraticis, ut habeantur quatuor radices. Ac prima fronte clarum est p majorem esse non posse quam $\frac{1}{6}b^2$ (scil. in formulis ubi habetur + p) nec q quam $\frac{1}{6}b^2$. Generaliter vero $\frac{1}{6}b^2 \mp \frac{1}{4}pb \mp \frac{1}{6}q$, id est distantia centri ab Axe EG, minor esse debet quam $EH = 4\sqrt{\frac{1}{6}}VE^3$, hoc est (ob $VE = \frac{1}{6}b^2 \mp \frac{1}{4}p$) quam $\frac{1}{6}b^2 \mp \frac{1}{4}p\sqrt{\frac{1}{6}b^2 + p}$ vel $-p$; signis + & - in dubio relictis, ut secundum aequationis cujusvis naturam variari possint; quem-

admodum in Cubicis superius ostensum est; ac nollem doctis tædium injicere, aut discantibus singula particulatim rimandi voluptatem ac exercitationem præripere.

Termini autem ultimi r limitatio eadem facilitate inveniri nequit; id adeo, quia Problema sit Solidum, in Curvam Parabolæ demittere perpendicularem, quodq; non sine solutione æquationis Cubicæ resolvi possit. Itaq; prima loco deficiat secundus terminus, vel si adfuerit, tollatur, ut æquatio habeat formulam $z^4 \cdot * \cdot p z^2 \cdot q z \cdot r = 0$. Ac si fuerit $-r$, semper duabus vel quatuor Radicibus explicari potest; ut autem quatuor sint, oportet centrum circuli intra Paraboloides prædictas constitui, sive ut sit $-p$, ac $q q$ minus quam $\frac{8}{27} p^3$ sive cubo ex $\frac{1}{3} p$. Deinde habeantur radices æquationis hujus $y^3 \cdot * \cdot \frac{1}{3} p y \cdot \frac{1}{3} q = 0$, quantitativibus p & q iisdem signis annexis quibus in Biquadratica. Hæ autem Radices auxilio Tabulæ Sinuum satis expedite inveniuntur. Inventis autem tribus illis y , (quæ sunt ordinatim applicatæ ad Axem Parabolæ, de punctis ubi incidunt perpendiculara in Curvam ejus. scil. $Z Y$ in Fig. III.) $p y y - 3 y^3$ ex minore y , quantitatem maximam r designabit, si fuerit $-r$; qua si minor fuerit r , æquatio quatuor habebit radices, aliter duas. Ast si fuerit $+r$, oportebit eam minorem esse quam $3 y^3 - p y y$ ex media y , nam si major sit, non nisi duas habere potest radices, saltem si minor sit r quam $3 y^3 - p y y$ ex maxima y . Hac vero si major sit, nulla omnino radice vera explicabilis est æquatio. Hi vero iidem limites aliter designantur ex quantitate q , scil. $\frac{1}{3} q y - y^3$ in primo casu, $y^3 - \frac{1}{3} q y$ in secundo, ac $y^3 + \frac{1}{3} q y$ in tertio.

Fieri autem potest ut duæ minores quantitates y non longe distent ab invicem, unde evenit quod utraq; ex perpendicularibus major sit quam recta $G A$, scil. cum $q q$ majus sit quam $\frac{4}{27} p^3$, minus vero quam $\frac{8}{27} p^3$; cadente centro intra spatium Paraboloidibus utriusq; Figuræ I & II interjectum. Hoc in casu, si fuerit $+r$, non nisi duæ possunt esse radices, existente $y^3 + \frac{1}{3} q y$ ex maxima y , major quam r ; aliter nulla. At si $\frac{1}{3} q y - y^3$ ex minima y , major fuerit quam r signo $-$ notata, r vero major quam $\frac{1}{3} q y - y^3$ ex media y , tunc habentur quatuor radices

dices; at duæ tantum si vel major priore vel minor posteriore inventa sit r.

Si vero in æquatione fuerit + p, vel si sit — p & q q majus fuerit quam $\frac{3}{16}p^2$, æquatio $y^3 \cdot * \cdot \frac{1}{4}p y \cdot \frac{1}{4}q$ unica tantum explicatur radice y; hoc est una tantum perpendicularis de centro Circuli demitti potest: unde certo concluditur duas tantum radices haberi posse in æquatione data, quarum summa, si fuerit — r, cum quantitate r augetur; at si habeatur + r, obtenta quantitate y, quantitas illa r minor esse debet quam $y^4 + \frac{1}{4}q y$; nam si ea major sit, æquatio proposita absurda & impossibilis est.

Longum & superfluum esset omnes hujus census æquationes percurrere, cum ex jam dictis attendenti satis evidens sit, quæ Negativæ, quæ Affirmativæ sint; atq; quod Radicum harum Limites ex quantitatibus inventis y petantur. In exemplum vero, quod cuiusvis in cæteris imitari licet, proponantur indagandi limites sive conditiones, sub quibus in Æquatione Biquadratica 4 Radices Affirm. dari possint. Hoc autem fit quoties centrum circuli G ponitur in spatio U P K, (Fig. II.) ac simul habetur + r sive Circuli radius minor quam G D: Unde patet, æquationem de qua agitur hujus esse formulæ $z - bz^2 + pz^3 - qz + r = 0$; p vero majorem esse non posse quam $\frac{1}{4}bb$, nec $\frac{3}{16}pb$ hoc in casu, quam $\frac{1}{16}b^3 + \frac{1}{4}q$; deinde opus est ut $\frac{1}{4}pb - \frac{3}{16}p$ in $\sqrt{\frac{1}{16}bb - \frac{3}{16}p}$ major sit quam $\frac{1}{16}b^3 + \frac{1}{4}q - \frac{1}{4}pb$; & ex his limitibus certo constabit centrum intra spatium U P K inveniri. Ut vero definitur quantitas r, solvenda primum est Cubica $y^3 \cdot * \cdot - \frac{3}{16}b^3 - \frac{1}{4}p y = \frac{1}{16}b^3 + \frac{1}{4}q - \frac{1}{4}pb$; & habebuntur puncta, in quæ perpendiculares de centro in Curvam Parabolæ cadunt.

Inventis autem tribus valoribus hujus y, r minor esse debet quam $\frac{3}{16}b^3 + \frac{1}{4}bq - \frac{1}{16}bbp + 3y^4 - \frac{3}{16}b^3yy + p y y$ ex media y, major vero quam $\frac{3}{16}b^3 + \frac{1}{4}bq - \frac{1}{16}bbp + 3y^4 - \frac{3}{16}b^3yy + p y y$ ex minima y. Hos vero limites si excedat r, non nisi duæ Radices haberi possunt. Deniq; si $\frac{3}{16}b^3 + \frac{1}{4}bp - \frac{1}{16}bbp + 3y^4 - \frac{3}{16}bb y y + p y y$ ex maxima y, minor fuerit quam r, æquatio proposita impossibilis est.

Accidit etiam ut quatuor sint Affirmativæ, cum Centrum G constituitur in spatiolo V T S; ducta scil. R T S perpendiculari in medium suppositæ lineæ AD: Hoc autem fit cum p major est quam $\frac{1}{16}b^2$, ac $\frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{3}p \sqrt{\frac{1}{16}b^2 - \frac{1}{6}p}$ major quam $\frac{1}{3}pb - \frac{1}{12}b^2 - \frac{1}{4}q$: Quo in casu semper duæ, aliquando tres ex Radicibus sunt majores quam $\frac{1}{4}b$.

Notandum vero hic limitem illum ex minima y productum, aliquando negativum fieri, sive minorem nibilo; quoties scil. maxima ex tribus perpendicularibus major est quam GD. (Fig. II.) Hoc si acciderit quantitas + r à limite præscripto ex media y, in nihilum minui potest. Defectus vero limitis ex minima y monstrat quanta possit esse - r in æquatione, si habeantur tres radices Affirmativæ ac una Negativa; quam si excedat, non nisi duæ, altera Affirmativa, altera Negativa, dari possunt. Hæc autem omnia demonstrantur ex eo quod prædicti limites quantitatis r, sint differentiæ Quadratorum lineæ GD & perpendicularium in Curvam Parabolæ.

Ob perplexas vero cautiones, quas parit in æquationibus hifce signorum diversitas, præstat semper secundum terminum tollere, ac deinde juxta præcepta jam tradita radicum numerum ac signa inquirere; præsertim si quantitates illæ y non multum distent ab invicem. Ex quatuor autem hifce radicibus Affirmativis, duæ semper sunt minores quam $\frac{1}{4}b$, duæ vero majores; nempe si DG minor sit quam AG, sive $\frac{1}{3}pb$ quam $\frac{1}{4}b^2 + q$. Tres autem minores sunt quam $\frac{1}{4}b$, quoties perpendicularis media, sive ex media y inventa, major est quam AG, sive $\frac{1}{4}b^2$ major quam $3y^2 - p y y$ ex eadem media y; Quarta vero & maxima radix major est quam maxima y + $\frac{1}{4}b$; æquatior autem differentiæ ipsius b & summæ cæterarum trium radicum, ideoq; minor est b. Sed jam Manum de Tabula; Fortassis illi qui naturam Parabolæ penitus perspeçtam habent, majori compendio hæc omnia peragere valebunt; at si quantitates hæc omnes b. p. q. & r, absq; resolutione Cubicæ æquationis rite determinari possint, non sine causa ambigitur; quæcumq; enim æquationibus planis hæc in re fiunt, non veros limites, sed approximationes tantum exhibent.

